

## 2024 年硕士研究生入学考试大纲

考试科目名称： 数学综合

考试时间： 120 分钟， 满分： 100 分

### 一、 考试要求

理解距离空间、赋范空间和巴拿赫空间等概念，掌握巴拿赫空间的基本性质、线性算子和线性泛函的基本知识，掌握开映射定理、闭图象定理、共鸣定理和哈恩-巴拿赫等定理，掌握希尔伯特空间的基本性质、希尔伯特空间正交化方法、投影定理及其应用。

理解误差的基本概念，掌握非线性方程的数值解法，线性方程组的直接法，多项式插值方法，最佳逼近，数值积分与微分，线性与非线性方程组的迭代解法，常微分方程初值问题的数值解法。

理解微分方程、初始条件等基本概念，掌握一阶微分方程的类型及解法，掌握一阶微分方程解的存在与唯一性定理，会用逐步逼近法求近似解，掌握求解高阶微分方程的理论和方法，掌握求解线性方程组的方法，会求解简单常系数的线性方程组。

### 二、 考试内容

#### (一) 泛函分析初步考试内容 (30 分)

##### 1. 距离空间：

- (1) 距离空间的定义及例，距离空间中的收敛及其性质；
- (2) 几类特殊的点集，稠密性与可分性；同胚，等距；
- (3) 完备距离空间；第一及第二类型的集；
- (4) 准紧集，紧集，全有界集；紧集上的连续映射；
- (5) 压缩映射，不动点定理及应用。

##### 2. 巴拿赫空间与希尔伯特空间：

- (1) 赋范线性空间，巴拿赫空间；商空间；
- (2) 内积空间，极化恒等式，希尔伯特空间；
- (3) 正交与正交分解，规范正交系；施密特正交化定理。

##### 3. 巴拿赫空间上的有界线性算子：

- (1) 有界线性算子的概念与性质，线性算子空间，算子的乘法；

- (2) 开映射定理, 逆算子定理, 闭图像定理;
  - (3) 共鸣定理, 傅里叶级数的发散问题;
  - (4) 有界线性泛函的延拓, 哈恩-巴拿赫定理;
  - (5) 对偶空间, 自反空间, 伴随算子;
  - (6) 有界线性算子谱的基本性质; 紧算子, 有限秩算子。
4. 希尔伯特空间上的有界线性算子:
- (1) 希尔伯特空间上的有界线性算子, 对偶空间, 伴随算子;
  - (2) 自伴算子, 正算子, 单调自伴算子列。

## (二) 数值计算方法考试内容 (35 分)

### 1. 引论:

- (1) 求绝对误差、相对误差与有效数字;
- (2) 数值稳定性和数值稳定的算法;
- (3) 掌握数值计算的几个原则, 如尽量避免相近数相减等。

### 2. 非线性方程的数值解法:

- (1) 用二分法求解非线性方程的数值解;
- (2) 构造求非线性方程的收敛的迭代方法;
- (3) 用 Newton 迭代法求非线性方程的数值解。

### 3. 线性方程组的直接解法:

- (1) 用 Gauss 消去法和选主元的 Gauss 消去法求解线性方程组;
- (2) 求矩阵的 LU 分解和用平方根方法求线性方程组的解;
- (3) 求向量的范数和矩阵的范数;
- (4) 求方程组或矩阵的条件数、判断方程组的病态性。

### 4. 多项式插值:

- (1) 求 Lagrange 插值多项式和 Newton 插值多项式;
- (2) 解释 Runge 现象;
- (3) 解释样条函数和三次样条插值函数。

### 5. 最佳逼近:

- (1) 解释一致逼近和平方逼近多项式;
- (2) 求线性方程组的最小二乘解;

- (3) 求一些简单的可化为线性拟合的非线性拟合问题。
6. 数值积分与微分：
- (1) 求数值积分公式的代数精度；
  - (2) 用 Newton-Cotes 公式计算数值积分；
  - (3) 用复化的求积公式计算数值积分并估计误差；
  - (4) 用基本的数值微分两点公式和三点公式计算。
7. 线性与非线性方程组的迭代解法：
- (1) 用 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法求线性方程组的数值解；
  - (2) 判断一般线性方程组的迭代法的收敛性；
  - (3) 用 Newton 法求非线性方程组的数值解。
8. 常微分方程初值问题的数值解：
- (1) 用向前和向后的 Euler 法求常微分方程的数值解；
  - (2) 用简单的 Runge-Kutta 公式计算常微分方程的数值解；
  - (3) 判断线性多步的预测-校正方法的阶。

### (三) 常微分方程考试内容 (35 分)

1. 引论：
- (1) 利用微分方程解决实际问题的建模方法；
2. 基本概念：
- (1) 微分方程、阶、通解与特解、初始条件与初值问题、积分曲线。
3. 一阶微分方程的类型及解法：
- (1) 掌握变量分离方程与变量变换法；
  - (2) 可化为变量分离方程的类型；
  - (3) 线性方程与常数变易法 (含伯努利方程)；
  - (4) 恰当方程与积分因子法；
  - (5) 一阶隐方程及参数表示。
4. 一阶微分方程的解的存在定理：
- (1) 一阶微分方程解的存在与唯一性定理，会用逐步逼近法求近似解；
  - (2) 解的延拓；
  - (3) 解对初值的连续性和可微性定理。

5. 高阶微分方程：

- (1) 高阶微分方程的一般理论；
- (2) 齐次线性微分方程与非齐次线性微分方程的解的性质与结构；
- (3) 常系数线性微分方程的解法；
- (4) 欧拉方程；
- (5) 可降阶的微分方程。

6. 线性方程组：

- (1) 线性微分方程与线性微分方程组之间的等价关系；
- (2) 线性微分方程组的解的存在性定理；
- (3) 简单常系数线性微分方程组。

### 三、参考书目

1. 《实变函数与泛函分析基础》(第三版), 程其襄、张奠宙等, 高等教育出版社, 2010.
2. 《数值计算方法》(第三版), 李维国、聂立新, 石油工业出版社, 2019.
3. 《常微分方程》(第三版), 王高雄、周之铭等, 高等教育出版社, 2006.